

Modellezési feladatok

- (1) Egy cég asztalokat és székeket készít. Egy asztalhoz 1 óra munka és 9 m^2 deszkalap szükséges, egy székhez pedig 1 óra munka és 5 m^2 deszkalap. Jelenleg 6 óra munka és 45 m^2 deszkalap áll rendelkezésre. Egy asztalon a nyereség 8 \$, egy széken 5 \$. Adjuk meg a feladat modelljét, ha célunk a nyereség maximalizálása! Írjuk fel a feladat optimális megoldását!

Megoldás: A feladat matematikai modelljében x_1 a gyártott asztalok, x_2 pedig a gyártott székek számát jelöli. Ekkor:

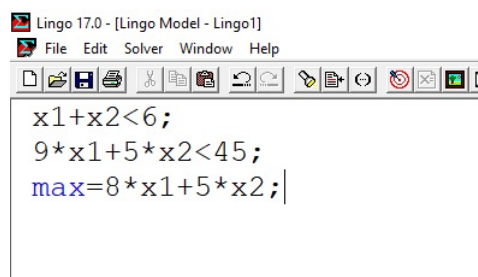
$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$9x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$z = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

Az optimális megoldás kereséséhez két programot is bemutatunk. Először nézzük meg, hogy a Lingo segítségével hogyan lehet előállítani az optimális megoldást! A modell felvétele a programban:



A modellt a Lingo szintaktikájának megfelelően kell kis mértékben módosítanunk. Fontos, hogy a változókat nem szükséges deklarálni, ha használunk egy olyan szimbólumot, melyet a program nem ismer, az rögtön egy nemnegatív, folytonos változóként jön létre. A programban a \leq illetve a \geq feltételekből elhagyható az egyenlőség, ez nem változtat a feltétel értelmén (tehát nem $<$ illetve $>$ módon kezeli a program). Fontos azonban, hogy a matematikai modellben a feltételekből nem hagyható el az egyenlőség! A Lingóban az összes parancsot $;$ -vel le kell zárni, illetve minden műveleti jelet ki kell írni. A célfüggvény megadása a **max** vagy **min** foglalt szóval kezdődik, utána meg kell adni a célértéket.

A modell megoldására a LINGO (vagy esetleg újabb verziókban Solver) menüből a Solve paranccsal, vagy a fenti gombok közül a középtájon található, piros Solve gombra kattintással van lehetőség (a felugró ablak bezárható, nem tartalmaz fontos információt). A Lingo eredményjelentése az alábbi:

```

Global optimal solution found.
Objective value:                41.25000
Infeasibilities:                0.000000
Total solver iterations:        2
Elapsed runtime seconds:        0.11

```

```

Model Class:                    LP

```

```

Total variables:                2
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              0

```

```

Total constraints:              3
Nonlinear constraints:          0

```

```

Total nonzeros:                6
Nonlinear nonzeros:            0

```

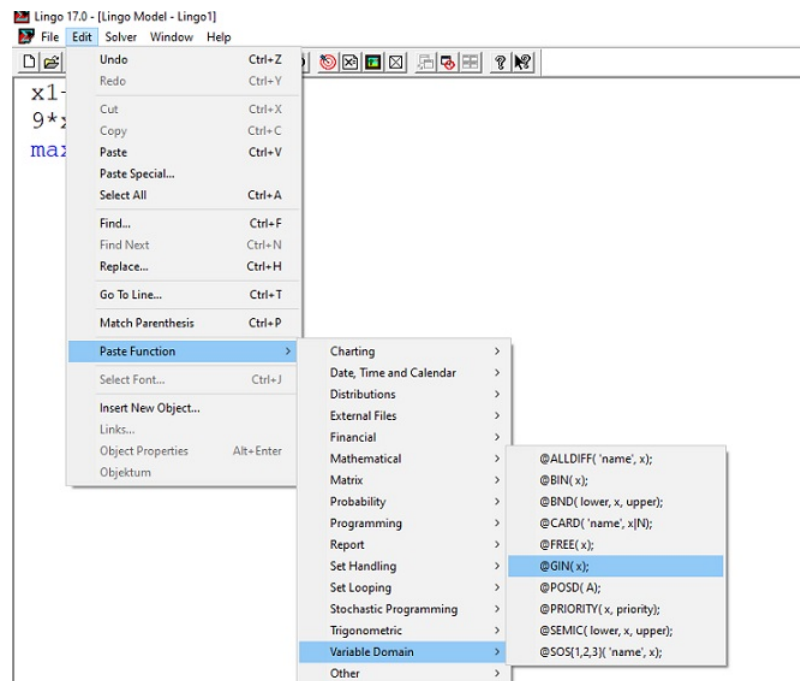
Variable	Value	Reduced Cost
X1	3.750000	0.000000
X2	2.250000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	1.250000
2	0.000000	0.750000
3	41.25000	1.000000

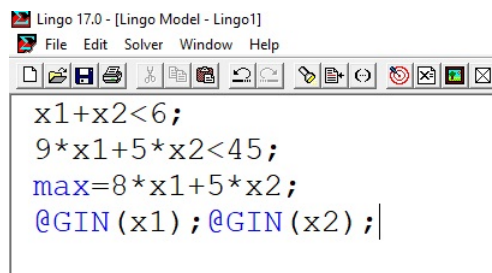
Innen a feladat optimális megoldását a következőképpen olvassuk le: az Objective value jelenti az optimális célértéket. Ezután a program felsorol néhány technikai paramétert, melyekre nincs szükségünk. A tényleges megoldásokat az alsó táblázatból kapjuk. A célváltozókat a Value oszlopban, az eltéréseket a Slack or Surplus oszlopban találjuk. Fontos, hogy a Lingo a célérték sorához is rendel egy eltérésváltozót, ami itt a harmadik sor, ez azonban nyilván nem eltérésváltozója a feladatnak, az érték megegyezik a célértékkel, tehát ezt nem írjuk be a megoldásba. Az eltérésváltozókból mindig annyi van, amennyi korlátozó feltétel szerepelt a feladatban, az értéküket úgy kapjuk meg, hogy az optimális megoldást behelyettesítjük a feltételrendszerbe, és vizsgáljuk, hogy az így kapott értékek mennyire térnek el a megadott korláttól. Jelen esetben mindkét eltérés 0, azaz a 6 munkaórát és a 45 m² deszkalapot is teljesen felhasználtuk. Tehát a feladat megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 2.25 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 41.25.$$

Jól látható, hogy a feladat folytonos megoldását kaptuk meg, tehát ha nem mondunk mást, a program a folytonos megoldást állítja elő. Mivel az asztalokból és a székekből is csak egész megoldás jöhet szóba, a tört értékeket nem fogadhatjuk el, definiálnunk kell a programban, hogy csak egész változókat vegyen figyelembe. Ezt a menüben az Edit/Paste function/Variable domain pontban tudjuk megtenni. Most a @GIN függvényre lesz szükségünk, ezzel tudjuk egy adott változóra megadni, hogy csak egész értékeket vehet fel.



Ezt mindkét változóra külön megadva hozzávesszük a modellhez:



Új eredményjelentést kérve kapjuk:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                40.000000
Objective bound:                40.000000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:         0
Elapsed runtime seconds:        0.05

Model Class:                    PILP

Total variables:                 2
Nonlinear variables:             0
Integer variables:               2

Total constraints:               3
Nonlinear constraints:           0

Total nonzeros:                  6
Nonlinear nonzeros:              0
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	5.000000	-8.000000
X2	0.000000	-5.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	40.000000	1.000000

Tehát a feladat tiszta egészértékű megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 40.$$

Ezek alapján azaltból 5 darabot gyártunk és széket nem gyártunk, ekkor a nyereség 40 dollár. Az eltérések alapján 1 munkaórát nem használunk ki az optimális gyártás során, a nyersanyagot teljes mértékben felhasználjuk. (Megjegyezzük, hogy az eredményjelentésben további oszlopok is találhatóak, ezeket azonban egyelőre nem használjuk fel.)

Második körben nézzük meg, hogy az Excel Solverben hogyan történik egy LP modell megoldása! Az adatok felvétele:

Fájl	Kezdőlap	Beszúrás	Lapelrendezés	Képletek	Adatok	Véleményezés	N
110							
	A	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2			b	
2	f1	1	1		<=	6	
3	f2	9	5		<=	45	
4	c*	8	5		max		
5	x*	0	0				
6							
7							

A táblázatban a feladat alapmátrixát szerepeltetjük, mellette a korlátozó feltételek jobb oldalán szereplő konstansokat a b oszlopban, továbbá külön sor felel meg a célegyütthatóknak valamint a döntési változóknak. A döntési változók értékét állítsuk alaphelyzetben 0-ra. A további oszlopokat jelmagyarázatként vettük fel. Egyelőre üres a D oszlop, itt állítjuk elő a modell tényleges feltételeit. Mivel minden feltétel az alapmátrix megfelelő sorából és a döntési változókból előállított szorzatok összege, a feltételeket a SZORZATÖSSZEG beépített függvénnyel állíthatjuk elő, a két tömbnek a mátrix első sorát illetve a döntési változók sorát választva:

Fájl	Kezdőlap	Beszúrás	Lapelrendezés	Képletek	Adatok	Véleményezés	N
SZORZAT...							
=SZORZATÖSSZEG(B2:C2;B5:C5)							
	A	B	C	SZORZATÖSSZEG(tömb1; [tömb2]; [tömb3]; [tömb4]; ...)			
1		x1	x2			b	
2	f1	1	1	C5	<=	6	
3	f2	9	5		<=	45	
4	c*	8	5		max		
5	x*	0	0				
6							
7							

A modell összes feltétele, illetve a célfüggvény is hasonló alakú, tehát a képletet másolhatjuk. Arra fontos figyelni, hogy mindegyik képletben meg kell hagynunk az x^* -gal jelölt sort, tehát a képlet másolása előtt ezt rögzítenünk kell. Ezek eredménye

Fájl	Kezdőlap	Beszúrás	Lapelrendezés	Képletek	Adatok	Véleményezés
SZORZAT... : X ✓ f_x =SZORZATÖSSZEG(B3:C3;\$B\$5:\$C\$5)						
	A	B	C	SZORZATÖSSZEG(tömb1; [tömb2]; [tömb3]; [tömb4]; ...)		
1		x1	x2			b
2	f1	1	1	0	<=	6
3	f2	9	5	\$C\$5)	<=	45
4	c*	8	5	0	max	
5	x*	0	0			
6						
7						

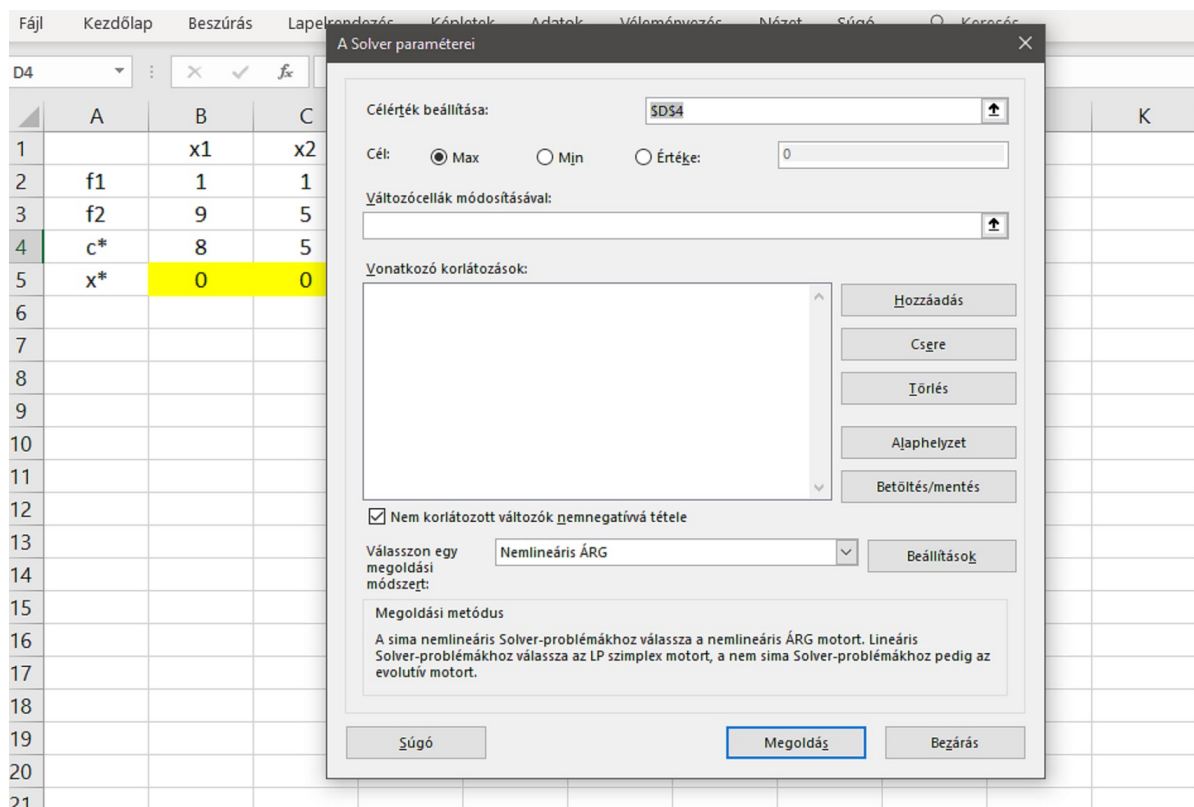
és

Fájl	Kezdőlap	Beszúrás	Lapelrendezés	Képletek	Adatok	Véleményezés
SZORZAT... : X ✓ f_x =SZORZATÖSSZEG(B4:C4;\$B\$5:\$C\$5)						
	A	B	C	SZORZATÖSSZEG(tömb1; [tömb2]; [tömb3]; [tömb4]; ...)		
1		x1	x2			b
2	f1	1	1	0	<=	6
3	f2	9	5	0	<=	45
4	c*	8	5	\$C\$5)	max	
5	x*	0	0			
6						
7						

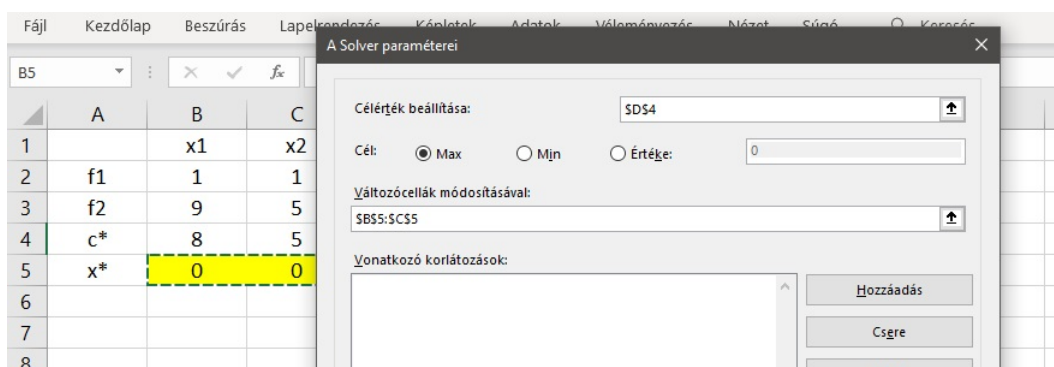
Természetesen indulásként minden képlet 0-t eredményez, hiszen egyelőre minden változó értéke 0. A táblázatban sárgával színeztük a döntési változók celláit, világosszürke jelöli a korlátozó feltételek képleteit, sötétszürke pedig a célfüggvényt. Ismételten megjegyezzük, hogy az összes szürke cella képlettel számolt érték! Tehát a feladat Excel-beli induló táblája:

Fájl	Kezdőlap	Beszúrás	Lapelrendezés	Képletek	Adatok	Véleményezés	Nézet
I8 : X ✓ f_x							
	A	B	C	D	E	F	G
1		x1	x2			b	
2	f1	1	1	0	<=	6	
3	f2	9	5	0	<=	45	
4	c*	8	5	0	max		
5	x*	0	0				
6							
7							

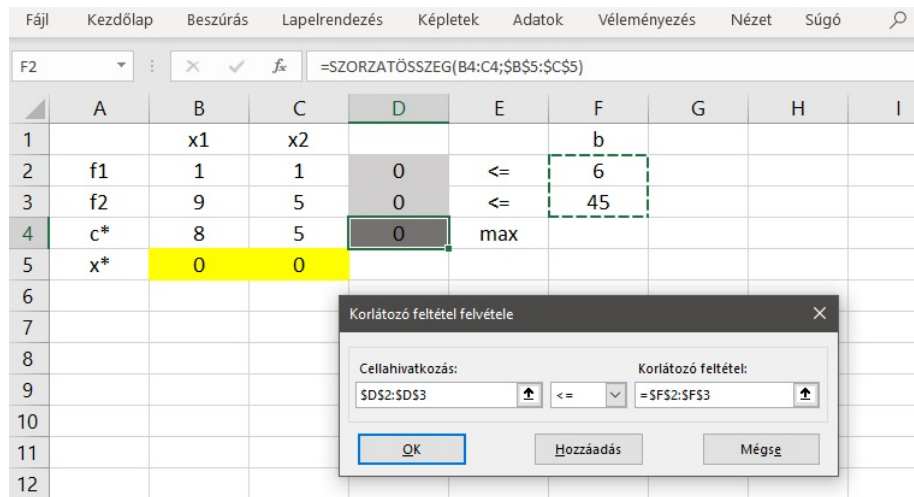
A feladat így már olyan szerkezetben szerepel a programban, melyet a Solver bővítmény segítségével meg tudunk oldani. A Solver az Adatok menüben érhető el. Ha a bővítmény nem aktív, akkor a Fájl menü Beállítások pontjában a Bővítmények között aktiválhatjuk az Ugrás gombra kattintva. A Solvert célszerű a célértékcellára történő kattintás után indítani, ekkor a következő ablak jelenik meg:



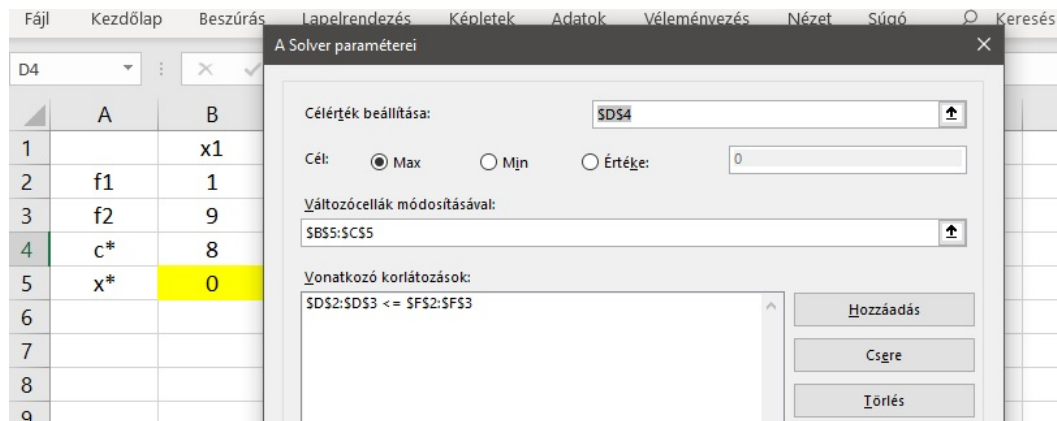
Ekkor a célérték beállításánál azonnal megjelenik a célérték képletét tartalmazó cella. Ezután kiválaszthatjuk, hogy milyen szélsőértéket keresünk, előírhatjuk maximális, minimális, valamint egy rögzített érték keresését is. Majd meg kell adni a döntési változókat tartalmazó tömböt:



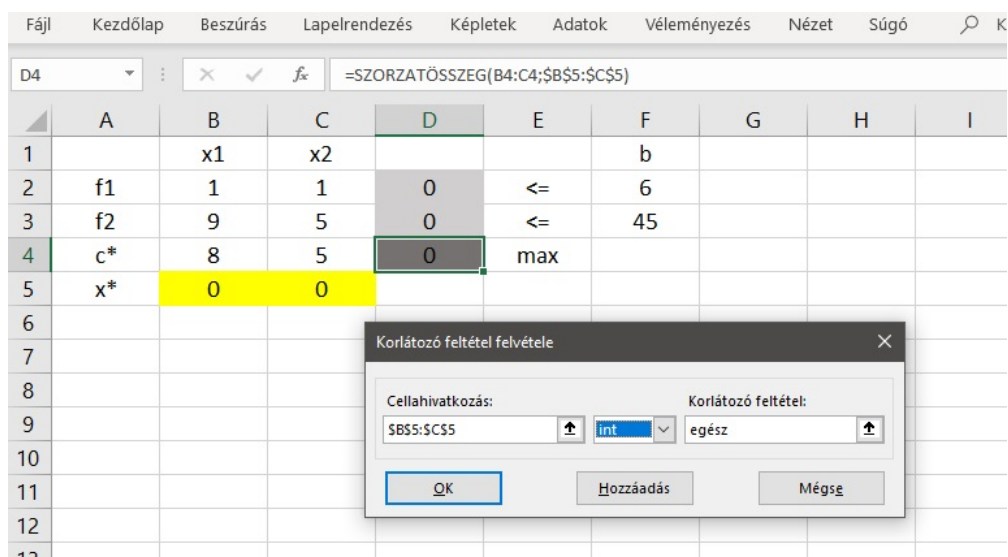
A vonatkozó korlátozásoknál a Hozzáadás gombra kattintva adhatjuk meg a korlátozó feltételeket. Ezeket külön-külön is megadhatjuk, azonban azonos irányú feltételeket egyszerűbben, tömbönként is meg lehet adni:



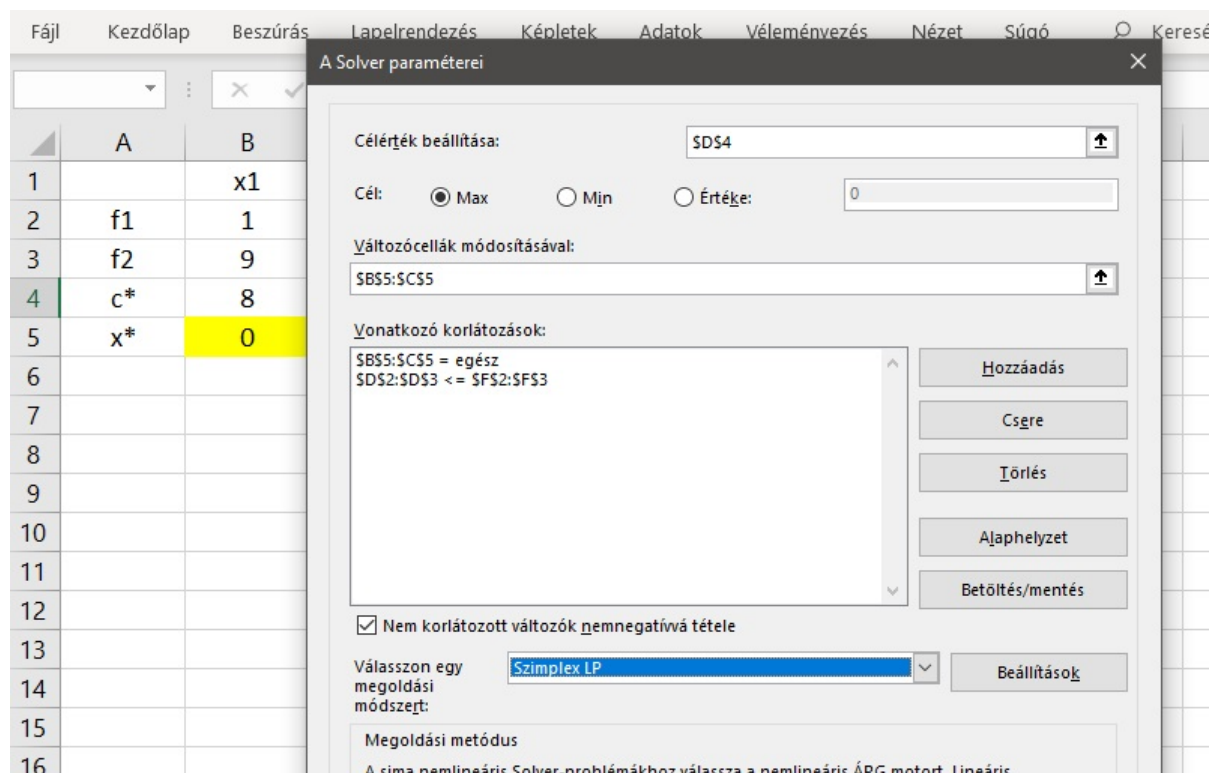
Ekkor az OK-ra kattintás után a megadott feltételek megjelennek a Solver ablakban is:



A feltételek között szereplő sor valójában két feltételt tartalmaz egyszerre. Az Excelben is alapértelmezés szerint folytonos változókkal dolgozunk, ezért meg kell adnunk továbbá, hogy minden változó csak egészértékű lehet. Ezt szintén a Hozzáadás gombbal tehetjük meg, a döntési változók kijelölése után középen nem relációjelet, hanem az 'int'-et választva:



Ezután a feltételek között megjelenik a döntési változók celláira előírva az egészértékűségi feltétel. A változók nemnegativitása jelölőnégyzet alaphelyzetben ki van töltve, a programban ez a döntési változókra vonatkozó alapfeltétel. Itt ez megmarad, hiszen a feladat változói nemnegatívak. Utolsó lépésként kijelöljük, hogy a megoldási módszer a Szimplex módszer:



Ekkor készen vagyunk a Solver paraméterezésével. A Megoldás gombra kattintva megkapjuk a feladat optimális megoldását. A párbeszédablakban a program jelzi, hogy megoldást talált. A jelentések közül az eredményjelentést kijelölve egy új munkalapon kapjuk meg a megoldást. Megjegyezzük, hogy itt általában egyéb jelentések közül is lehet választani, azonban most az egészértékűségi feltétel miatt csak eredményjelentést kérhetünk. A megoldást leolvashatjuk abból is, ahogy az eredeti modellben megváltoztak a döntési változók (vagy változócellák), vagy megvizsgáljuk a program jelentését:

4 Eredmény: A Solver megoldást talált. Az összes korlátozó és optimalizálási feltétel teljesült.

5 Solver motor

6 Motor: Szimplex LP

7 Megoldási idő: 0,047 másodperc.

8 Közelítő lépések: 2 Részproblémák: 6

9 A Solver beállításai

10 Maximális idő Korlátlan, Közelítő lépések Korlátlan, Precision 0,000001, Automatikus léptékváltás

11 Részproblémák maximális száma Korlátlan, Egész megoldások maximális száma Korlátlan, Egész megoldások tűrése 1%

12

13

14 Célértékcella (Max)

15

Cella	Név	Eredeti érték	Végérték
\$D\$4	c*	0	40

16

17

18

19 Változócellák

20

Cella	Név	Eredeti érték	Végérték	Egész
\$B\$5	x* x1	0	5	Egész
\$C\$5	x* x2	0	0	Egész

21

22

23

24

25 Korlátozó feltételek

26

Cella	Név	Cellaérték	Képlet	Állapot	Korlátváltozó
\$D\$2	f1	5	\$D\$2<=\$F\$2	Nem korlátoz	1
\$D\$3	f2	45	\$D\$3<=\$F\$3	Korlátoz	0
\$B\$5:\$C\$5=Egész					

27

28

29

30

Megoldásként ugyanazt kaptuk, mint korábban, 5 asztalt kell gyártanunk az optimális, 40 dolláros bevételhez, székeket nem gyártunk. A változók értéke mellett láthatjuk, hogy mindkét változóra elő volt írva az egészértékűségi feltétel. Az eltérésváltozókat a program a Korlátváltozó oszlopban adja, értékük 1 és 0, ezek a szabad munkaóra illetve nyersanyag kapacitást jelzik.

- (2) Egy cég kétféle fából készült játékot gyárt: katonákat és vonatokat. Egy katonát 27 dollárért lehet eladni, és előállításához 10 dollár értékű nyersanyag szükséges. Minden legyártott katonára 14 dollárral növeli a cég bérben jelentkező változó költségét és az általános költséget. Egy vonat 21 dollárért adható el, előállításához 9 dollár értékű nyersanyag szükséges. Minden legyártott vonat 10 dollárral növeli a költségeket. A játékok gyártása kétféle munkát igényel, fafaragó és felületkezelő munkát. Egy katonára előállításához 2 óra felületkezelő munka és 1 óra fafaragó munka szükséges, egy vonathoz 1 óra felületkezelő és 1 óra fafaragó munka kell. A nyersanyag minden héten korlátlanul áll rendelkezésre, de csak 100 felületkezelő munkaóra és 80 fafaragó munkaóra használható fel. A vonatok iránti kereslet korlátlan, katonákból azonban legfeljebb csak negyvenet vesznek meg hetente. Adjuk meg a feladat modelljét és az optimális megoldást, ha célunk a cég heti profitjának maximalizálása!

Megoldás: A döntési változók itt is a gyártott mennyiségek lesznek, jelölje x_1 a hetente gyártott katonák, x_2 pedig a hetente gyártott vonatok számát. A feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

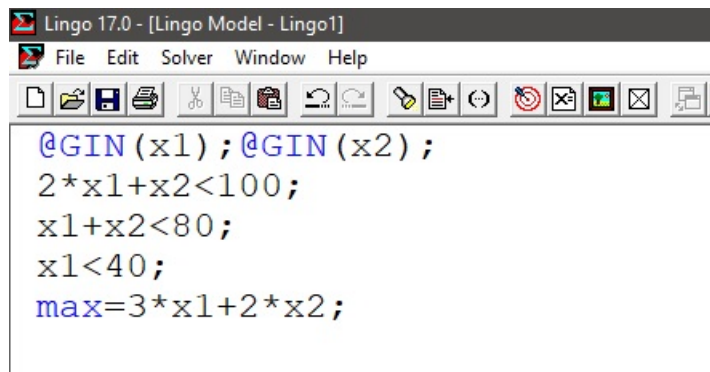
$$2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

Az előző feladatban részletezett módon vesszük fel a modellt Lingoban:



Az optimális megoldás az eredményjelentésből leolvasható:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 180.$$

Tehát 20 katonát és 60 vonatot kell gyártanunk, az optimálisan elérhető heti nyereség 180 dollár. Az eltérésvektor mutatja, hogy ebben az esetben a két munkaóra feltételt maximálisan kihasználtuk, azonban a keresleti feltétel alapján hússzal több katonát is gyárthattunk volna.

- (3) Egy bútorkészítő cég íróasztalokat, asztalokat és székeket gyárt. Mindegyik bútortípus gyártásához faanyag és kétféle szakmunka szükséges, asztalosmunka és felületkezelés. Az egyes bútortípusok előállításához a különböző erőforrásokból szükséges mennyiséget az alábbi táblázat adja meg:

Erőforrás	Íróasztal	Asztal	Szék
Faanyag (egység)	8	6	1
Felületkezelés (óra)	4	2	1.5
Asztalosmunka (óra)	2	1.5	0.5

Jelenleg 48 egység faanyag, 20 órányi felületkezelés és 8 órányi asztalosmunka kapacitás áll rendelkezésre. Egy íróasztal 60, egy asztal 30, egy szék pedig 20 dollárért adható el. Írjuk fel a modellt, ha a cég az összjövedelmét kívánja maximalizálni! Adjuk meg a feladat optimális megoldását!

Megoldás: A modellben a döntési változók felvételekor jelölje x_1 a gyártandó íróasztalok, x_2 a gyártandó asztalok és x_3 a gyártandó székek számát. A modell a következő lineáris programozási feladat:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

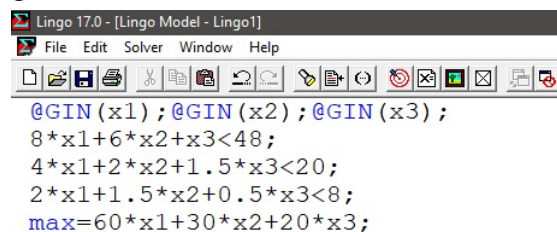
$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$

$$z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \rightarrow \max$$

A modell felvétele a Lingóban:



```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
@GIN(x1) ; @GIN(x2) ; @GIN(x3) ;
8*x1+6*x2+x3<48;
4*x1+2*x2+1.5*x3<20;
2*x1+1.5*x2+0.5*x3<8;
max=60*x1+30*x2+20*x3;

```

A Lingo eredményjelentése a következő:

Global optimal solution found.		
Objective value:	280.0000	
Objective bound:	280.0000	
Infeasibilities:	0.000000	
Extended solver steps:	0	
Total solver iterations:	2	
Elapsed runtime seconds:	0.13	
Model Class:		
PILP		
Total variables:	3	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	3	
Total constraints:	4	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	12	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	2.000000	-60.00000
X2	0.000000	-30.00000
X3	8.000000	-20.00000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	24.00000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	280.0000	1.000000

Innen a korábban már tanult módon leolvashatjuk a feladat megoldását:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 280.$$

Tehát az optimálisan elérhető összjövedelem 280 dollár, ekkor 2 íróasztalt és 8 széket gyártunk. Az \underline{u}_0 eltérésvektor alapján megadható, hogy az optimális jövedelemre vezető gyártás esetén 24 egység faanyagot nem használtunk fel, azonban a felületkezelésre illetve az asztalosmunkára rendelkezésre álló élőmunkát teljes egészében kihasználtuk.

- (4) Egy bőripari cég öveket és cipőket gyárt. Egy öv elkészítéséhez 2 egységnyi bőrre és 1 óra szakmunkára van szükség. Egy pár cipő elkészítéséhez 3 egységnyi bőr és 2 óra szakmunka szükséges. Legfeljebb 25 egységnyi bőrt lehet beszerezni 5 dolláros egységáron, a szakmunka-kapacitás 15 óra, és a szakmunka költsége 10 dollár/óra. Egy öv eladási ára 23 dollár, egy pár cipőt 40 dollárért lehet értékesíteni. A cég maximalizálni akarja a nyereségét. Írjuk fel a feladat modelljét és adjuk meg az optimális megoldást!

Megoldás: Jelölje x_1 az elkészített övek számát, x_2 pedig a gyártott pár cipők számát. A feladat matematikai modellje:

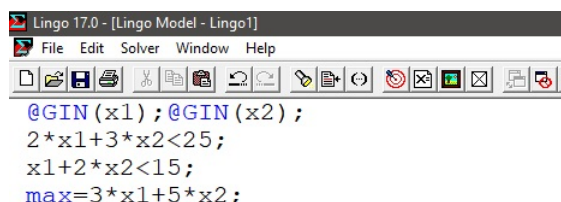
$$x_1, x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 25$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 15$$

$$z = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

A modell felvétele:



```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
@GIN(x1); @GIN(x2);
2*x1+3*x2<25;
x1+2*x2<15;
max=3*x1+5*x2;

```

Az eredményjelentés:

Global optimal solution found.		
Objective value:		40.00000
Objective bound:		40.00000
Infeasibilities:		0.000000
Extended solver steps:		0
Total solver iterations:		2
Elapsed runtime seconds:		0.19
Model Class: PILP		
Total variables:	2	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	2	
Total constraints:	3	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	6	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	5.000000	-3.000000
X2	5.000000	-5.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	40.00000	1.000000

Tehát az optimális megoldás az, hogy mindkét termékből 5 darabot gyártunk, ekkor mindkét korlátozó feltételt teljesen kihasználjuk. Az elérhető legnagyobb nyereség 40 dollár.

- (5) Egy cukrászda 3 típusú süteményt készíthet, melyekhez 3 fő alapanyagot használnak fel. A gyártott mennyiségeket darabszámban mérik. Az A mátrix a_{ij} eleme megadja, hogy az i -edik

alapanyagból a j -edik termék egy darabjában mekkora a felhasznált mennyiség.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Egy adott időszakban az egyes termékekhez az alapanyagokból felhasználható mennyiségek legfeljebb 900, 600 és 1050 egység. Az egyes termékek egységére eső hozamok rendre 20, 30 és 40 pénzegység.

- Írjuk fel a matematikai modellt, ha a cél a lehető legnagyobb hozam! Adjuk meg a feladat megoldását!
- Egészítsük ki a modellt a következő feltételekkel: a termékek gyártott összmennyisége legalább 100, de legfeljebb 200 darab lehet, és mindegyik termékből legalább húsz darabot készíteni kell! Adjuk meg az optimális megoldást!
- Milyen termékösszetétel esetén lesz a b) feladatban a költségre eső hozam optimális, ha az önköltség darabonként rendre 80, 50 és 60 pénzegység, és felmerül még 120 pénzegység fix költség is? Mekkora ez az arány? Írjuk fel a megfelelő célfüggvényt is!

Megoldás: A modellben x_1, x_2 és x_3 jelölje a termékekből gyártandó mennyiségeket. A feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

$$3x_1 + 6x_2 + 3x_3 \leq 900$$

$$3x_1 + 3x_3 \leq 600$$

$$6x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 1050$$

$$z = 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 \rightarrow \max$$

A feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 9500.$$

Tehát az első típusú süteményből nem készítünk, a másodikból 50, a harmadikból 200 darabot gyártunk, ekkor az elérhető hozam 9500 pénzegység. Az eltérésvektor alapján az első két erőforrást teljes mértékben felhasználjuk, a harmadik erőforrásból azonban marad 300 egység.

A b) részben a feladat modelljét ki kell egészítenünk a következő feltételekkel:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 200$$

$$x_1 \geq 20$$

$$x_2 \geq 20$$

$$x_3 \geq 20$$

Ekkor az optimális megoldás a következőképpen adódik:

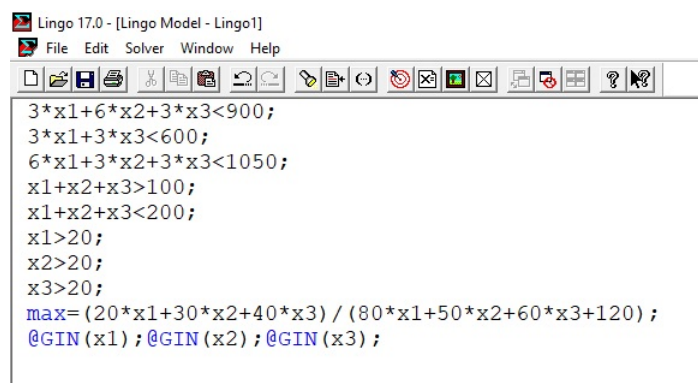
$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 160 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 240 \\ 60 \\ 390 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 140 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 7400.$$

Az optimális hozamra (ami 7400 pénzegység) vezető mennyiségek ekkor 20, 20 és 160 darab. Az eltérésvektorban szereplő értékek közül az első három jelenti az erőforrásokból megmaradó mennyiségeket. A negyedik érték azt jelenti, hogy az előírt minimális összmenyniségnél, ami 100 darab volt, összesen 100-zal gyártunk több süteményt. Az ötödik érték az előírt felső korláthoz viszonyítja az eltérést, a maximálisan gyártandó mennyiség 200 darab volt, és éppen 200 darabot gyártunk összesen, tehát az eltérés 0. Az utolsó három érték azt mutatja, hogy az előírt minimális darabszámhoz, a 20-hoz képest mennyivel gyártunk több süteményt az adott típusból az optimális esetben. Az eltérésvektorba az értékeket a feltétel irányától függetlenül előjel nélkül írjuk be, tehát adott esetben többletet illetve hiányt is mutathat az itt szereplő érték.

A c) feladatban az új célfüggvényünk:

$$z = \frac{20x_1 + 30x_2 + 40x_3}{80x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 120} \rightarrow \max$$

Az ilyen jellegű feladatot hiperbolikus programozási feladatnak is szokás nevezni. A Lingo az ilyen nehezebb célfüggvényekkel is tud számolni. A feladat Lingo modellje:



```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
3*x1+6*x2+3*x3<900;
3*x1+3*x3<600;
6*x1+3*x2+3*x3<1050;
x1+x2+x3>100;
x1+x2+x3<200;
x1>20;
x2>20;
x3>20;
max=(20*x1+30*x2+40*x3)/(80*x1+50*x2+60*x3+120);
@GIN(x1);@GIN(x2);@GIN(x3);
  
```

Az eredményjelentés:

```

Local optimal solution found.
Objective value:                0.6006494
Objective bound:                0.6006494
Infeasibilities:                0.0000000
Extended solver steps:         0
Total solver iterations:       29
Elapsed runtime seconds:       0.22

Model Class:                    PINLP

Total variables:                3
Nonlinear variables:           3
Integer variables:             3

Total constraints:              9
Nonlinear constraints:         1

Total nonzeros:                20
Nonlinear nonzeros:            3

```

Variable	Value
X1	20.00000
X2	20.00000
X3	160.0000

Row	Slack or Surplus
1	240.0000
2	60.00000
3	390.0000
4	100.0000
5	0.0000000
6	0.0000000
7	0.0000000
8	140.0000
9	0.6006494

Tehát a megoldás ugyanaz, mint a b) részben, a költséghez viszonyított hozam is optimális ebben az esetben, a célérték $z_0 = 0.6006494$, azaz a hozam kb. 60 %-a a gyártásra fordított költségnek.

- (6) Egy gazdaságban az állatok etetésére négyféle takarmánykeveréket használhatnak, amelyeket három tápanyagból készítenek. Az egyes keverékek a tápanyagokból az alábbi mennyiségeket tartalmaznak a megfelelő egységekben:

	1. keverék	2. keverék	3. keverék	4. keverék
A tápanyag	2	1	1	0
B tápanyag	1	2	0	2
C tápanyag	1	0	2	1

A tápanyagokból legalább 5, 4 illetve 10 egységnyi biztosítanunk kell az etetési program során. Az egyes keverékek beszerzési árai 5, 3, 4 illetve 1 pénzegység. Cél a minimális költségű takarmányozási program meghatározása. Adjuk meg a matematikai modellt és az optimális megoldást!

Megoldás: A modell felvétele során a döntési változók jelentsék rendre azt, hogy az egyes takarmánykeverékeket milyen mennyiségben alkalmazzuk az etetés során. Ezek a változók nemnegatív folytonos változók lesznek. Ez alapján a matematikai modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_4 \geq 4$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 \geq 10$$

$$z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

A modellt a Lingoban felírva és megoldva az alábbi eredményjelentést kapjuk:

LINGO 11.0 - [Solution Report - LINGO1]
File Edit LINGO Window Help

Global optimal solution found.
Objective value: 20.00000
Infeasibilities: 0.000000
Total solver iterations: 3

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.5714286	0.000000
X2	0.000000	1.000000
X3	3.857143	0.000000
X4	1.714286	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	-2.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	-1.000000
4	20.00000	-1.000000

Ezek alapján a feladat optimális megoldása (két tizedesre kerekítve):

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.57 \\ 0 \\ 3.86 \\ 1.71 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 20.$$

- (7) Van 1000 darab 7 méteres oszlopunk, melyekből 1.5 illetve 2.5 méteres darabokat kell vágunk. Legalább négyszer annyi 1.5 méteres oszlopra van szükségünk, mint 2.5 méteresre. Hogyan vágjuk fel az oszlopokat, hogy a keletkező hulladék minimális legyen?

Megoldás: A lehetséges darabolások:

1. változat: 2 darab 2.5 méteres, 1 darab 1.5 méteres oszlop, 0.5 méter hulladék,
2. változat: 1 darab 2.5 méteres, 3 darab 1.5 méteres oszlop,
3. változat: 4 darab 1.5 méteres oszlop, 1 méter hulladék.

A döntési változókat úgy választjuk meg, hogy x_1 , x_2 és x_3 jelentse azt, hogy rendre az 1., 2. és 3. változatot hányszor alkalmazzuk a vágás során. Ekkor a változók nemnegatívak és csak egész értékeket vehetnek fel.

A matematikai modell:

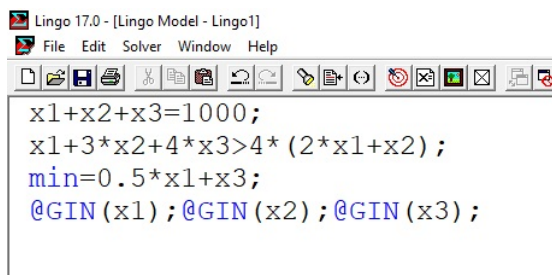
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 4 \cdot (2x_1 + x_2)$$

$$z = 0.5x_1 + x_3 \rightarrow \min$$

A második feltételt átrendezhetjük a $7x_1 + x_2 - 4x_3 \leq 0$ alakra, de a Lingóban erre nincs szükség, az eredeti alakban is értelmezni tudja az egyenlőtlenséget. A modell felvétele:



```
Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
x1+x2+x3=1000;
x1+3*x2+4*x3>4*(2*x1+x2);
min=0.5*x1+x3;
@GIN(x1);@GIN(x2);@GIN(x3);
```

Az eredményjelentés:

```
Global optimal solution found.
Objective value:                200.0000
Objective bound:                200.0000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:         0
Total solver iterations:        1
Elapsed runtime seconds:        0.05

Model Class:                    MILP

Total variables:                3
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              3

Total constraints:              3
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                8
Nonlinear nonzeros:            0
```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	0.500000
X2	800.0000	0.000000
X3	200.0000	1.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	200.0000	-1.000000

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 800 \\ 200 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 200.$$

Tehát a minimális 200 méter hulladékot úgy érhetjük el, hogy az 1. változatot nem alkalmazzuk, 800-szor darabolunk a 2., és 200-szor a 3. változat szerint. Ekkor pontosan négyszer annyi 1.5 méteres oszlopot állítunk elő (3200 darabot), mint 2.5 métereset (800 darabot).

- (8) Egy 30, egy 25 és egy 20 méter hosszúságú vashuzalt kell 6 méteres, 4 méteres és 3 méteres hosszúságú darabokra leszabni. A 6 méteres darabokból pontosan kétszer annyi kell, mint a 4 méteres darabokból és pontosan feleannyi, mint a 3 méteresekből. Írja fel a feladat matematikai modelljét és adja meg, hogyan kell elvégezni a darabolást, ha célunk, hogy maximális számú huzal keletkezzen!

Megoldás: A feladat modelljében jelölje x_1, x_2 és x_3 a 30 méteres vashuzalból vágott 6, 4 illetve 3 méteres darabok számát; jelölje x_4, x_5 és x_6 a 25 méteres vashuzalból vágott 6, 4 illetve 3 méteres darabok számát; és jelölje x_7, x_8 és x_9 a 20 méteres vashuzalból vágott 6, 4

illetve 3 méteres darabok számát. Ekkor a feladat modellje:

$$x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 30$$

$$6x_4 + 4x_5 + 3x_6 \leq 25$$

$$6x_7 + 4x_8 + 3x_9 \leq 20$$

$$x_1 + x_4 + x_7 = 2 \cdot (x_2 + x_5 + x_8)$$

$$2 \cdot (x_1 + x_4 + x_7) = x_3 + x_6 + x_9$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \rightarrow \max$$

A modell a Lingóban:

```
Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

6*x1+4*x2+3*x3<30;
6*x4+4*x5+3*x6<25;
6*x7+4*x8+3*x9<20;
x1+x4+x7=2*(x2+x5+x8);
2*(x1+x4+x7)=x3+x6+x9;
max=x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9;
@GIN(x1);@GIN(x2);@GIN(x3);
@GIN(x4);@GIN(x5);@GIN(x6);
@GIN(x7);@GIN(x8);@GIN(x9);
```

Az eredményjelentés:

Lingo 17.0 - [Solution Report - Lingo1]

File

Edit

Solver

Window

Help

</

Az eredményjelentés alapján a feladat optimális megoldása úgy áll elő, hogy a 30 méteres huzalból egy 6 méteres és kettő 4 méteres darabot vágunk, a 25 méteres huzalból nyolc 3 méteres darabot vágunk, és a 20 méteres huzalból három 6 méteres darabot vágunk. Így összesen 14 darab huzal keletkezik, négy 6 méteres, kettő 4 méteres és nyolc 3 méteres, ami éppen megfelel a feltételeknek.

(9) Négy részvény jelenlegi árfolyamai és a tőzsde 2 hónappal későbbi árfolyamelvárásai:

	Jelenlegi árfolyam (Ft/db)	Árfolyamelvárás (Ft/db)
A	13 800	16 600
B	14 600	15 500
C	2 800	3 100
D	3 800	4 200

Mindegyik részvényből legalább 500 000 Forint értékben vásárolunk a portfólió kialakításához. Összesen legfeljebb 4 millió Forintot költhetünk. Az **A** részvényből legfeljebb 100 darab vásárolható. A vásárlást követően minden részvényre azonnal limitáras eladási megbízást adunk az árfolyamelvárásokon. A brókeri jutalék vásárláskor a vételi ár, illetve eladáskor a bevétel 1 %-a. Ha minden eladási megbízás teljesül, milyen portfólió esetén lesz az elvárt hozam optimális?

Megoldás: A portfólió összeállításához azt kell meghatároznunk, hogy adott részvényből hány darabot vásároljunk. Tehát x_1, x_2, x_3 és x_4 jelölje rendre az **A**, **B**, **C** és **D** részvényekből vásárolt darabszámot. Ekkor mindegyik változó nemnegatív egész értékű. A matematikai modell:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$13\,800x_1 \geq 500\,000$$

$$14\,600x_2 \geq 500\,000$$

$$2\,800x_3 \geq 500\,000$$

$$3\,800x_4 \geq 500\,000$$

$$x_1 \leq 100$$

$$(13\,800x_1 + 14\,600x_2 + 2\,800x_3 + 3\,800x_4) \cdot 1.01 \leq 4\,000\,000$$

$$z = (16\,600x_1 + 15\,500x_2 + 3\,100x_3 + 4\,200x_4) \cdot 0.99 -$$

$$(13\,800x_1 + 14\,600x_2 + 2\,800x_3 + 3\,800x_4) \cdot 1.01 \rightarrow \max$$

A Lingoban a modellt a már ismert módon felvéve és megoldva a következő eredményjelentést kapjuk:

```

Global optimal solution found.
Objective value:                               447682.0
Objective bound:                               447682.0
Infeasibilities:                               0.000000
Extended solver steps:                         0
Total solver iterations:                       0
Elapsed runtime seconds:                       0.05

Model Class:                                   MILP

Total variables:                               4
Nonlinear variables:                           0
Integer variables:                             4

Total constraints:                             7
Nonlinear constraints:                         0

Total nonzeros:                               13
Nonlinear nonzeros:                           0

```

Variable	Value	Reduced Cost
X1	100.0000	-2496.000
X2	35.00000	-599.0000
X3	557.0000	-241.0000
X4	134.0000	-320.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	880000.0	0.000000
2	11000.00	0.000000
3	1059600.	0.000000
4	9200.000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	602.0000	0.000000
7	447682.0	1.000000

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 35 \\ 557 \\ 134 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 880\,000 \\ 11\,000 \\ 1\,059\,600 \\ 9\,200 \\ 0 \\ 602 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 447\,682.$$

Tehát az optimális portfólióhoz 100 darab **A** részvényt, 35 darab **B** részvényt, 557 darab **C** részvényt és 134 darab **D** részvényt vásárolunk, ekkor 447 682 Forint hozamot érhetünk el. Az eltérésvektor első négy értéke azt mutatja, hogy az 500 000 Forinthez képest mennyivel vásároltunk nagyobb értékben az adott részvényből. Az ötödik érték, a 0 jelzi, hogy az **A** részvényből a maximálisan lehetséges 100 darabot vettük, nincs eltérés. A hatodik érték, a 602 mutatja, hogy a lehetséges 4 millió Forintnál ennyivel költöttünk összesen kevesebbet.

- (10) Egy kórházban a hét napjain különböző számú nővérre van igény. A szükséges létszámot az alábbi táblázat mutatja:

Napok	H	K	Sz	Cs	P	Sz	V
Munkaerő-igény (fő)	16	15	17	18	14	12	10

Minden nővérnek négy napot kell egymás után dolgozni és utána három szabadnapot kap. Legalább hány nővért kell a kórháznak alkalmaznia? Írjuk fel a matematikai modellt és adjuk meg az optimális megoldást!

Megoldás:A modellhez értelmezzük a döntési változókat úgy, hogy x_i jelöli azon nővérek számát, akik a négy napot a hét i -edik napján kezdik, ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ és az első nap

hétfő. Ezek a változók ekkor természetesen nemnegatív egész értékeket vehetnek csak fel. A feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \in \mathbb{Z}$$

$$x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 16$$

$$x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 15$$

$$x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 17$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 18$$

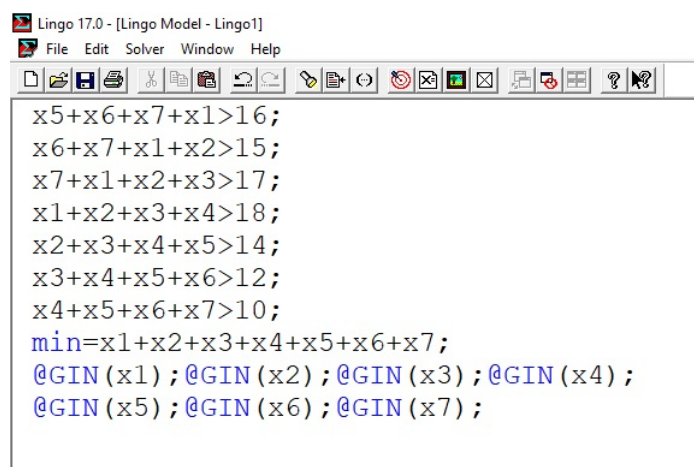
$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 12$$

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 10$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \rightarrow \min$$

A modell felvétele a Lingoban:



The screenshot shows the Lingo 17.0 application window. The title bar reads "Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]". The menu bar includes "File", "Edit", "Solver", "Window", and "Help". Below the menu bar is a toolbar with various icons for file operations, editing, and solving. The main text area contains the following Lingo code:

```
x5+x6+x7+x1>16;  
x6+x7+x1+x2>15;  
x7+x1+x2+x3>17;  
x1+x2+x3+x4>18;  
x2+x3+x4+x5>14;  
x3+x4+x5+x6>12;  
x4+x5+x6+x7>10;  
min=x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7;  
@GIN(x1);@GIN(x2);@GIN(x3);@GIN(x4);  
@GIN(x5);@GIN(x6);@GIN(x7);
```


Az eredményjelentés:

```

Global optimal solution found.
Objective value:                26.000000
Objective bound:                26.000000
Infeasibilities:                0.000000
Extended solver steps:          0
Total solver iterations:        15
Elapsed runtime seconds:        0.06

Model Class:                    MILP

Total variables:                7
Nonlinear variables:            0
Integer variables:              7

Total constraints:              8
Nonlinear constraints:          0

Total nonzeros:                35
Nonlinear nonzeros:            0

```

Variable	Value	Reduced Cost
X5	5.000000	1.000000
X6	1.000000	1.000000
X7	1.000000	1.000000
X1	9.000000	1.000000
X2	4.000000	1.000000
X3	3.000000	1.000000
X4	3.000000	1.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	1.000000	0.000000
5	1.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	0.000000	0.000000
8	26.000000	-1.000000

Nagyon fontos figyelni arra, hogy a Lingo olyan sorrendben fogja adni a változókat, ahogyan a modellben találkozik velük. Tehát ez alapján a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 26.$$

Tehát 26 nővér alkalmazásával teljesíthető a hét napjaira előírt összes feltétel. Hétfőn 9, kedden 4, szerdán és csütörtökön 3-3, pénteken 5, szombaton és vasárnap 1-1 nővér kezdi a négy napos munkahetet. Az eltérésváltozók mutatják, hogy a hét negyedik és ötödik napján eggyel több nővér dolgozik, mint az előírt szükséges létszám, a többi napon pontosan annyian dolgoznak, mint amennyi a munkaerő-igény.

Esetleg érdemes kipróbálni, mire jutunk, ha más sorrendben vesszük fel a modellt. A Lingóban bármilyen sorrendben felvehetjük a modellt, de ekkor ügyelnünk kell arra, hogy az eredményjelentésben is változhat a változók sorrendje. Például vegyük előre a Lingóban az értelmezési tartományra vonatkozó parancsokat:

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]

File Edit Solver Window Help

$@GIN(x1); @GIN(x2); @GIN(x3); @GIN(x4);$
 $@GIN(x5); @GIN(x6); @GIN(x7);$
 $x5+x6+x7+x1>16;$
 $x6+x7+x1+x2>15;$
 $x7+x1+x2+x3>17;$
 $x1+x2+x3+x4>18;$
 $x2+x3+x4+x5>14;$
 $x3+x4+x5+x6>12;$
 $x4+x5+x6+x7>10;$
 $min=x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7;$

Ekkor a modellben az eredeti sorrendnek megfelelően fordulnak elő a változók, tehát ebben a sorrendben adja a program a megoldást. Az eredményjelentés:

Global optimal solution found.

Objective value:	26.000000
Objective bound:	26.000000
Infeasibilities:	0.000000
Extended solver steps:	0
Total solver iterations:	14
Elapsed runtime seconds:	0.05

Model Class: MILP

Total variables:	7
Nonlinear variables:	0
Integer variables:	7

Total constraints:	8
Nonlinear constraints:	0

Total nonzeros:	35
Nonlinear nonzeros:	0

Variable	Value	Reduced Cost
X1	9.000000	1.000000
X2	3.000000	1.000000
X3	3.000000	1.000000
X4	3.000000	1.000000
X5	5.000000	1.000000
X6	1.000000	1.000000
X7	2.000000	1.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	1.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	1.000000	0.000000
8	26.000000	-1.000000

Innen az optimális megoldás:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 26.$$

Látható azonban, hogy más megoldást kaptunk, természetesen ugyanazzal az optimális célértékkel. Ez azt jelenti, hogy a feladatnak alternatív optimuma van, több ugyanolyan jó megoldás is megadható. Ezt a program nem jelzi, de például a modell más sorrendben

történő megadásával kikényszeríthető, hogy más megoldást kapjunk, ha létezik. Az alternatív optimumokkal nem foglalkozunk, általában elmondható, hogy ezek gazdasági jelentősége csekély.

- (11) Egy megyében hat város van, amelyek közötti menetidőt (percben) az alábbi táblázatban adtuk meg:

	1	2	3	4	5	6
1	0	15	30	30	25	25
2	15	0	25	35	25	10
3	30	25	0	15	25	25
4	30	35	15	0	15	25
5	25	25	25	15	0	11
6	25	10	25	25	11	0

Mely városokban létesítsünk tűzoltó állomást, ha minimális számú állomással kell biztosítanunk, hogy minden város legalább egy állomástól legfeljebb 20 perc alatt elérhető legyen? Adjuk meg a matematikai modellt és az optimális megoldást!

Megoldás: A probléma úgy is megfogalmazható, hogy minden város esetén el kell döntününk, hogy ott legyen-e állomás vagy ne. Matematikailag az ilyen igen-nem döntéseket úgy modellezhetjük, hogy az "igen" döntésnek az 1 értéket feleltetjük meg, a "nem" döntésnek a 0 értéket. Tehát a döntési változókat vegyük fel olyan módon, hogy $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ esetén

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik városban építünk állomást,} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az ilyen speciális egészértékű változókat bináris (kétértékű) változóknak nevezzük.

A feladat matematikai modellje:

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ bináris

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_6 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 \geq 1$$

$$x_3 + x_4 + x_5 \geq 1$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$$

$$x_2 + x_5 + x_6 \geq 1$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$$

A Lingoban a bináris változó definiálása az egészértékű változókhöz teljesen hasonlóan történik, az Edit menüben a Paste function/Variable domain pontban most a @BIN parancsot kell választanunk. A feladat modellje a Lingoban:

```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help

x1+x2>1;
x1+x2+x6>1;
x3+x4>1;
x3+x4+x5>1;
x4+x5+x6>1;
x2+x5+x6>1;
min=x1+x2+x3+x4+x5+x6;
@BIN(x1);@BIN(x2);@BIN(x3);
@BIN(x4);@BIN(x5);@BIN(x6);

```

Az eredményjelentés:

Global optimal solution found.		
Objective value:	2.000000	
Objective bound:	2.000000	
Infeasibilities:	0.000000	
Extended solver steps:	0	
Total solver iterations:	0	
Elapsed runtime seconds:	0.05	
Model Class:	PILP	
Total variables:	6	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	6	
Total constraints:	7	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	22	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	1.000000
X2	1.000000	1.000000
X6	0.000000	1.000000
X3	0.000000	1.000000
X4	1.000000	1.000000
X5	0.000000	1.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	0.000000	0.000000
7	2.000000	-1.000000

Tehát a feladat optimális megoldása (ismét figyeljünk a sorrendre!):

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 2.$$

Így az összes várost két állomással le tudjuk fedni, ha a második és a negyedik városban építünk állomást, az eltérések alapján pedig látszik, hogy az optimális esetben minden város pontosan egy állomásról érhető el a megadott időn belül. Az ilyen típusú feladatokat szokás halmazlefedési feladatoknak is nevezni, itt a megoldásban egy diszjunkt lefedést adtunk meg,

a második városban épített állomás lefedi az első, a második és a hatodik várost, a negyedik városban épített állomás pedig lefedi a harmadik, a negyedik és az ötödik várost.

- (12) Egy cég öt különböző befektetési lehetőséget vizsgál. A pénzkáramlások és nettó jelenértékek a következő táblázatban adottak (millió euróban):

	1. bef.	2. bef.	3. bef.	4. bef.	5. bef.
0. időpontbeli készpénzkáramlás	11	53	5	5	29
1. időpontbeli készpénzkáramlás	3	6	5	1	34
Nettó jelenérték	13	16	16	14	39

A társaságnak 40 millió euró áll rendelkezésére befektetési célokra most (0. időpont), becslések szerint egy év múlva (1. időpont) lesz még 20 millió eurója befektetési célra. A 0. időpontban fennmaradó alapok már nem használhatóak fel az 1. időpontban. A társaság bármelyik befektetés bármilyen törtrészét is megvásárolhatja, ilyen esetben a pénzkáramlások és a nettó jelenérték is megfelelő módon átszámíthatódnak. Adjuk meg, hogyan tudja a társaság maximalizálni a befektetésekből származó nettó jelenértéket!

Megoldás: A cégnek el kell döntenie, hogy az egyes befektetésekből mekkora részeket vásárol. Tehát a döntési változókat értelmezzük úgy, hogy x_i jelentse az i -edik befektetési lehetőségből a cég által megvásárolt hányadot, ahol $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ez a hányad természetesen valahova 0 és 1 közé fog esni, tehát olyan folytonos változót kell majd ebben az esetben használnunk, mely itt veszi fel az értékeit. Ez alapján a feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned}
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\
 & 11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \leq 40 \\
 & 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \leq 20 \\
 & x_1 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_3 \leq 1 \\
 & x_4 \leq 1 \\
 & x_5 \leq 1 \\
 & z = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5 \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

A Lingoban a már megismert módon felvéve és megoldva a modellt a következő optimális megoldáshoz jutunk (kerekítve és az eltérésvektort elhagyva):

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.201 \\ 1 \\ 1 \\ 0.288 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 57.449.$$

Tehát 100 %-ban beszállunk az első, a harmadik és a negyedik befektetésbe, a másodiktól 20.1 %-ot, az ötödiktől 28.8 %-ot vásárolunk. Ekkor a befektetésekből származó nettó jelenérték 57 449 000 dollár. Az ilyen típusú problémát szokás tőkeallokációs feladatnak nevezni. Sok esetben észszerűtlen azonban megengedni, hogy törtrészt is vásárolhassunk egy befektetésből, mert ebben az esetben a hozam nem arányosan adódna, vagy éppen semmilyen hozamot nem tudnánk megvalósítani. Ezért sokszor egy tőkeallokációs feladat során abban kell döntenünk, hogy beszállunk-e egy adott befektetésbe, vagy sem. Erre ad példát a következő feladat.

- (13) Négyféle befektetést vizsgálunk. A befektetések hozamának nettó jelenértéke rendre 16 000, 22 000, 12 000 és 8 000 euró. Az egyes befektetések jelenbeni készpénzigénye rendre 5 000, 7 000, 4 000 és 3 000 euró. Jelen pillanatban 14 000 euró készpénz a befektethető összeg. Írja fel a probléma matematikai modelljét, ha célunk, hogy maximalizáljuk a befektetések összhozamának nettó jelenértékét! Adja meg a feladat optimális megoldását, mely befektetéseket érdemes választanunk?

Megoldás: Ez egy olyan tőkeallokációs feladat, mely esetén a döntési lehetőségünk annyi, hogy egy adott befektetést kiválasztunk-e vagy sem. Ha kiválasztjuk, akkor úgy tekintjük, hogy 100 %-ban számítjuk a költséget és a hasznot is, ha nem választjuk ki, akkor úgy tekintjük, hogy 0 %-ban számítjuk a költséget és a hasznot. Ezek alapján értelmezzük a döntési változókat $i = 1, 2, 3, 4$ esetén a következő módon:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ha befektetünk az } i\text{-edik lehetőségbe,} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

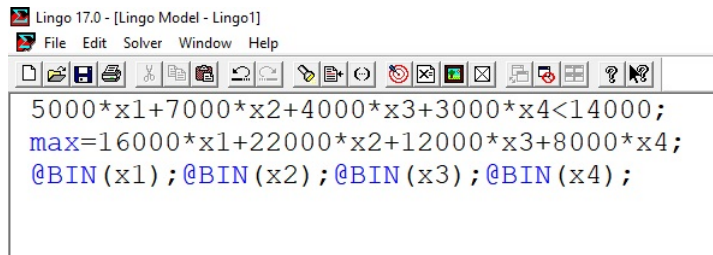
Tehát ismét bináris változókkal dolgozunk. A korlátozó feltételt a 14 000 euró befektethető összeg jelöli ki. A változók itt is tekinthetők arálynak attól függetlenül, hogy ez az arány csak 0 vagy 1, azaz 0 vagy 100 % lehet. Tehát a feltétel és a célfüggvény is az előző feladathoz teljesen hasonlóan adódik a linearitás felhasználásával. Az ilyen jellegű feladatot szokás hátizsák feladatnak is nevezni. Tehát a feladat modellje:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ bináris}$$

$$5000x_1 + 7000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \leq 14000$$

$$z = 16000x_1 + 22000x_2 + 12000x_3 + 8000x_4 \rightarrow \max$$

A modell felvétele a Lingoban:



Az eredményjelentés:

Global optimal solution found.		
Objective value:		42000.00
Objective bound:		42000.00
Infeasibilities:		0.000000
Extended solver steps:		0
Total solver iterations:		0
Elapsed runtime seconds:		0.05
Model Class:		PILP
Total variables:	4	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	4	
Total constraints:	2	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	8	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	-16000.00
X2	1.000000	-22000.00
X3	1.000000	-12000.00
X4	1.000000	-8000.000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	42000.00	1.000000

Tehát a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 42000.$$

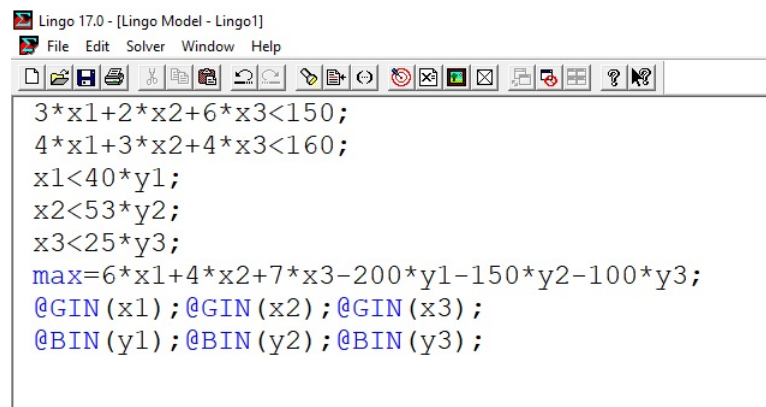
Tehát a második, harmadik és a negyedik befektetést érdemes választani, ekkor az elérhető hozam 42 000 euró, a készpénzkeretet teljes mértékben kihasználjuk.

- (14) Háromféle ruhadarabot gyártunk: ingeket, pulóvereket és nadrágokat. Mindegyik ruhaféle gyártásához speciális gépek kellenek, ezeket a cég bérlí. A heti bérleti díj 200 euró az ingekhez használt gép, 150 euró a pulóverekhez használt gép és 100 euró a nadrágokhoz használt gép esetén. Az egyes ruhadarabok gyártásához ing esetén 3 óra munka és 4 m² szövet, pulóver esetén 2 óra munka és 3 m² szövet, nadrág esetén 6 óra munka és 4 m² szövet szükséges. Hetente 150 óra élőmunka és 160 m² szövet áll rendelkezésre. A darabonkénti eladási ár a termékekre rendre 12, 8 és 15 euró, a változó költségek pedig darabonként rendre 6, 4 és 8 euró. Adjuk meg, milyen gyártás esetén lesz a cég heti profitja maximális!

Megoldás: Az ilyen típusú feladatot fixköltség problémának nevezzük. A döntési változók felvételét két részre bontjuk. Először is, jelölje x_1, x_2 és x_3 a szokásos módon rendre a gyártandó mennyiségeket. Ezek a változók nyilván nemnegatív egészek. Másodszor, a problémában azt is el kell döntenünk, hogy egy adott terméket egyáltalán gyártsunk-e vagy sem, hiszen a gépek bérleti díját csak akkor fizetjük ki, ha a megfelelő terméket gyártjuk. Tehát szükségünk lesz három bináris változóra rendre a három igen-nem döntés reprezentálására, $i = 1, 2, 3$ esetén legyen

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{ha gyártjuk az } i\text{-edik terméket,} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Az 1. fejezetben levezettük a modell felírásának lépéseit. Ezek alapján vegyük fel a Lingoban a következő modellt:



```

Lingo 17.0 - [Lingo Model - Lingo1]
File Edit Solver Window Help
3*x1+2*x2+6*x3<150;
4*x1+3*x2+4*x3<160;
x1<40*y1;
x2<53*y2;
x3<25*y3;
max=6*x1+4*x2+7*x3-200*y1-150*y2-100*y3;
@GIN(x1);@GIN(x2);@GIN(x3);
@BIN(y1);@BIN(y2);@BIN(y3);

```

Az eredményjelentés:

Global optimal solution found.		
Objective value:		75.00000
Objective bound:		75.00000
Infeasibilities:		0.000000
Extended solver steps:		0
Total solver iterations:		11
Elapsed runtime seconds:		0.06
Model Class: MILP		
Total variables:	6	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	6	
Total constraints:	6	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	18	
Nonlinear nonzeros:	0	

Variable	Value	Reduced Cost
X1	0.000000	-6.000000
X2	0.000000	-4.000000
X3	25.00000	-7.000000
Y1	0.000000	200.0000
Y2	0.000000	150.0000
Y3	1.000000	100.0000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	0.000000	0.000000
2	60.00000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	0.000000	0.000000
6	75.00000	1.000000

Ez alapján a feladat optimális megoldása:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad \underline{y}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 75.$$

Tehát hetente 25 nadrágot kell gyártanunk, ekkor az elérhető heti profit 75 euró és megmarad 60 m² szövet.

- (15) Egy cégnél a havi összes bér 14.6 millió Forint, amit szeretnének 10 millióra csökkenteni. A dolgozókat 4 bérkategóriában foglalkoztatják. A kategóriákban az átlagbér és a dolgozók száma:

	Átlagbér (eFt)	Dolgozók száma
A	80	50
B	100	40
C	120	30
D	150	20

Létszámcsökkentés után az **A** és **B** kategóriákban 20 %-kal, a **C** és **D** kategóriákban 10 %-kal emelik a béreket. Az **A** kategóriában legfeljebb kétszer annyi dolgozóra van szükség, mint **B**-ben. A **C** kategóriában legalább 14, a **D**-ben legalább 6, de legfeljebb 12 dolgozót kell alkalmazni. Hogyan valósítsák meg a létszámátalakítást, hogy a lehető legkevesebb embert kelljen elküldeni?

Megoldás: Válasszuk döntési változóknak az egyes bérkategóriákban elbocsátottak számát! Ekkor az x_1, x_2, x_3 és x_4 változók nyilván nemnegatív egészek. Az **A** kategóriában így $50 - x_1$ dolgozó marad, a **B** kategóriában $40 - x_2$, a **C**-ben $30 - x_3$ és a **D**-ben $20 - x_4$. A feladat matematikai modellje:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$50 - x_1 \leq 2 \cdot (40 - x_2)$$

$$30 - x_3 \geq 14$$

$$20 - x_4 \geq 6$$

$$20 - x_4 \leq 12$$

$$(50 - x_1) \cdot 96000 + (40 - x_2) \cdot 120000 + (30 - x_3) \cdot 132000 + (20 - x_4) \cdot 165000 \leq 10000000$$

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

A modellt a már ismert módon felvéve és megoldva a Lingoban, a következő optimális megoldás adódik:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 82\,000 \end{bmatrix}, \quad z_0 = 52.$$

Tehát az egyes kategóriákban elbocsátottak száma rendre 5, 17, 16 és 14 személy, összesen 52 dolgozót bocsátunk el. Az utolsó eltérésváltozó mutatja meg, hogy ekkor a teljes bérköltség 82 000 Forinttal lesz kevesebb, mint a 10 milliós keret.